

Semana 12

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 26 a 32 de la Guía 3. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Antes de comenzar con los ejercicios de la Semana 12, algunos comentarios sobre algunos ejercicios de la Semana 11.

La semana pasada vimos que si $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un \mathbb{K} -espacio euclídeo y $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio de dimensión finita, entonces la función $P_{\mathcal{S}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ que a cada vector $v \in \mathbb{V}$ le asigna su proyección ortogonal sobre \mathcal{S} está bien definida, es lineal, es un proyector y además vimos que $Im(P_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ y $Nu(P_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}^{\perp}$. Además, si $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es una **base ortogonal** de \mathcal{S} , tenemos que:

$$P_{\mathcal{S}}(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_r \rangle}{\|v_r\|^2} v_r. \quad (1)$$

Si \mathbb{V} es dimensión finita y B es cualquier base de \mathbb{V} , podemos estar interesados en calcular la matriz de la transformación lineal $P_{\mathcal{S}}$ en dicha base B . Recuerden que si $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base del espacio vectorial \mathbb{V} entonces, las columnas de $[P_{\mathcal{S}}]_B^B$ nos quedan

$$[P_{\mathcal{S}}]_B^B = [[P_{\mathcal{S}}(w_1)]^B \ [P_{\mathcal{S}}(w_2)]^B \ \dots \ [P_{\mathcal{S}}(w_n)]^B] \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

donde para $i = 1, 2, \dots, n$ podemos calcular $P_{\mathcal{S}}(w_i)$ usando la fórmula (1).

Veamos dos ejemplos.

Ejercicio 17 bis :

- En $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ con el producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, hallar la matriz con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sobre \mathcal{S} el subespacio de todas las matrices simétricas.
- En \mathbb{R}^4 con el producto interno canónico de \mathbb{R}^4 , hallar la matriz con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^4 de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^4 sobre $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1 \ -1 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T\}$.

Dem. a) : La Semana 11 resolvimos el **Ejercicio 18** y hallamos la expresión de $P_{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sobre \mathcal{S} (el subespacio de todas las matrices simétricas) y nos quedó

$$P_{\mathcal{S}}(X) = \begin{bmatrix} x_1 & \frac{x_2+x_3}{2} \\ \frac{x_2+x_3}{2} & x_4 \end{bmatrix}.$$

Recordar que $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Entonces, haciendo cuentas tenemos que:

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & y & [P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)]^E &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \\
P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} & y & [P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)]^E &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \\
P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} & y & [P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)]^E &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \\
P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & y & [P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)]^E &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
[P_{\mathcal{S}}]_E^E &= [[P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)]^E [P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)]^E [P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)]^E [P_{\mathcal{S}}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)]^E] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b) : Para calcular $P_{\mathcal{S}}(x)$ en cualquier vector $x \in \mathbb{R}^4$ con la fórmula (1), necesitamos una base ortogonal de \mathcal{S} . Claramente $B := \{[1 \ -1 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T\}$ es una base de \mathcal{S} pero no es ortogonal (en el producto interno canónico de \mathbb{R}^4). Aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt que veremos a continuación, tenemos que $B' := \{[1 \ -1 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 1 \ -2 \ 0]^T\}$ es una base ortogonal de \mathcal{S} .

Recordar que $E = \{[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^4 . Entonces, haciendo cuentas tenemos que:

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{S}}([1 \ 0 \ 0 \ 0]^T) &= \frac{\langle [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T \rangle}{\|[1 \ -1 \ 0 \ 0]^T\|^2} [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T + \frac{\langle [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 1 \ -2 \ 0]^T \rangle}{\|[1 \ 1 \ -2 \ 0]^T\|^2} [1 \ 1 \ -2 \ 0]^T \\
&= \frac{1}{2} [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T + \frac{1}{6} [1 \ 1 \ -2 \ 0]^T = \left[\frac{2}{3} \ -\frac{1}{3} \ -\frac{1}{3} \ 0 \right]^T,
\end{aligned}$$

$$y [P_{\mathcal{S}}([1 \ 0 \ 0 \ 0]^T)]^E = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Operando de manera similar, nos queda que:

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{S}}([0 \ 1 \ 0 \ 0]^T) &= [-\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ -\frac{1}{3} \ 0]^T & y & \quad [P_{\mathcal{S}}(0 \ 1 \ 0 \ 0)^T]^E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
P_{\mathcal{S}}([0 \ 0 \ 1 \ 0]^T) &= [-\frac{1}{3} \ -\frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 0]^T & y & \quad [P_{\mathcal{S}}(0 \ 0 \ 1 \ 0)^T]^E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
P_{\mathcal{S}}([0 \ 0 \ 0 \ 1]^T) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T & y & \quad [P_{\mathcal{S}}(0 \ 0 \ 0 \ 1)^T]^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
[P_{\mathcal{S}}]_E^E &= [[P_{\mathcal{S}}([1 \ 0 \ 0 \ 0]^T)]^E \ [P_{\mathcal{S}}([0 \ 1 \ 0 \ 0]^T)]^E \ [P_{\mathcal{S}}([0 \ 0 \ 1 \ 0]^T)]^E \ [P_{\mathcal{S}}([0 \ 0 \ 0 \ 1]^T)]^E] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Observar que en el ejercicio anterior vale que (hacer la cuenta)

$$[P_{\mathcal{S}}]_E^E = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^2 = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^T.$$

Como $P_{\mathcal{S}}$ es un proyector, ya vimos que siempre vale que $[P_{\mathcal{S}}]_E^E = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^2$.

Por otra parte, como además $P_{\mathcal{S}}$ es un proyector ortogonal, al final de este pdf (más abajo) veremos que siempre que consideremos **el producto interno canónico de \mathbb{R}^n y E sea la base canónica de \mathbb{R}^n** , entonces vale que $[P_{\mathcal{S}}]_E^E = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^T$.

Como verán esa es una herramienta para verificar rápidamente si cometimos algún error al calcular $[P_{\mathcal{S}}]_E^E$ ya que si no se cumple que $[P_{\mathcal{S}}]_E^E = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^2 = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^T$, entonces la matriz está mal calculada.

Algoritmo de Gram-Schmidt

Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio euclídeo y sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{V} , el *algoritmo de Gram-Schmidt* nos permite obtener una base ortonormal $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ de \mathbb{V} a partir de la base B con la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \text{gen}\{v_1\} &= \text{gen}\{w_1\}, \\ \text{gen}\{v_1, v_2\} &= \text{gen}\{w_1, w_2\}, \\ \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} &= \text{gen}\{w_1, w_2, w_3\}, \\ &\vdots \\ \text{gen}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} &= \text{gen}\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}. \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo de aplicación del algoritmo de Gram-Schmidt.

Ejercicio 28 : Se considera el \mathbb{R} -espacio euclídeo $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

y el subespacio $\mathbb{R}_2[x]$.

- Utilizar Gram-Schmidt para producir una base ortonormal $\{p_0, p_1, p_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ a partir de la base $\{q_0, q_1, q_2\}$ donde $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$, $q_2(x) = x^2$.
- Hallar las siguientes proyecciones ortogonales $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\sin(x))$, $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(x))$.
- Calcular las distancias $d(\sin(x), \mathbb{R}_2[x])$ y $d(\cos(x), \mathbb{R}_2[x])$

Dem. a) : Apliquemos el algoritmo de Gram-Schmidt.

Paso 1:

$$p_0 = \frac{q_0}{\|q_0\|}.$$

Como $\|q_0\|^2 = \int_{-1}^1 q_0(x)^2 dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2$. Entonces

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Paso 2

$$r_1 = q_1 - \langle q_1, p_0 \rangle p_0.$$

Entonces, haciendo cuentas

$$\langle q_1, p_0 \rangle = \int_{-1}^1 q_1(x)p_0(x)dx = \int_{-1}^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Por lo tanto $r_1 = q_1$ y como $\|r_1\|^2 = \|q_1\|^2 = \int_{-1}^1 q_1(x)^2 dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$. Entonces,

$$p_1(x) = \frac{r_1(x)}{\|r_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} x.$$

Paso 3

$$r_2 = q_2 - \langle q_2, p_1 \rangle p_1 - \langle q_2, p_0 \rangle p_0.$$

Entonces, haciendo cuentas

$$\langle q_2, p_0 \rangle = \int_{-1}^1 q_2(x)p_0(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\langle q_2, p_1 \rangle = \int_{-1}^1 q_2(x)p_1(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Por lo tanto $r_2 = q_2 - \langle q_2, p_0 \rangle p_0$ entonces $r_2(x) = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$ y como $\|r_2\|^2 = \int_{-1}^1 r_2(x)^2 dx = \int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \frac{8}{45}$. Entonces,

$$p_2(x) = \frac{r_2(x)}{\|r_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

La base ortonormal del subespacio $\mathbb{R}_2[x]$ nos quedó

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Recuerden que siempre podemos verificar si hicimos bien las cuentas viendo que efectivamente $\langle p_0, p_1 \rangle = \langle p_0, p_2 \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle = 0$ y $\|p_0\| = \|p_1\| = \|p_2\| = 1$.

b) : Como en el paso a) calculamos una base ortonormal del subespacio $\mathbb{R}_2[x]$ podemos aplicar la fórmula de la proyección ortogonal (1). Recuerden que esa fórmula sólo se puede usar cuando tenemos una base ortogonal del subespacio en cuestión, en este caso tenemos una base ortonormal (en particular es ortogonal). Entonces, usando la base ortonormal $\{p_0, p_1, p_2\}$ del item a), nos queda

$$P_{\mathbb{R}_2[x]}(\sin(x)) = \langle \sin(x), p_0 \rangle p_0 + \langle \sin(x), p_1 \rangle p_1 + \langle \sin(x), p_2 \rangle p_2.$$

Haciendo cuentas, tenemos que

$$\langle \sin(x), p_0 \rangle = \int_{-1}^1 \sin(x)p_0(x) dx = \int_{-1}^1 \sin(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0.$$

$$\langle \sin(x), p_1 \rangle = \int_{-1}^1 \sin(x)p_1(x) dx = \int_{-1}^1 \sin(x) \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = \sqrt{\frac{3}{2}} (2 \sin(1) - 2 \cos(1)).$$

$$\langle \sin(x), p_2 \rangle = \int_{-1}^1 \sin(x)p_2(x) dx = \int_{-1}^1 \sin(x) \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{R}_2[x]}(\sin(x)) &= \sqrt{\frac{3}{2}}(2 \sin(1) - 2 \cos(1))(\sqrt{\frac{3}{2}} x) \\ &= 3(\sin(1) - \cos(1)) x. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(x)) = \langle \cos(x), p_0 \rangle p_0 + \langle \cos(x), p_1 \rangle p_1 + \langle \cos(x), p_2 \rangle p_2.$$

Haciendo cuentas, tenemos que

$$\langle \cos(x), p_0 \rangle = \int_{-1}^1 \cos(x) p_0(x) dx = \int_{-1}^1 \cos(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \sin(1).$$

$$\langle \cos(x), p_1 \rangle = \int_{-1}^1 \cos(x) p_1(x) dx = \int_{-1}^1 \cos(x) \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = 0.$$

$$\langle \cos(x), p_2 \rangle = \int_{-1}^1 \cos(x) p_2(x) dx = \int_{-1}^1 \cos(x) \sqrt{\frac{45}{8}} (x^2 - \frac{1}{3}) dx = \sqrt{\frac{45}{8}} (4 \cos(1) - \frac{8 \sin(1)}{3}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \sin(1) (\frac{1}{\sqrt{2}} 1) + \sqrt{\frac{45}{8}} (4 \cos(1) - \frac{8 \sin(1)}{3}) (\sqrt{\frac{45}{8}} (x^2 - \frac{1}{3})) \\ &= \sin(1) 1 + \frac{15}{2} (3 \cos(1) - 2 \sin(1)) (x^2 - \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

c) : Recordando la fórmula de la distancia de un punto a un subespacio, tenemos que

$$d(\sin(x), \mathbb{R}_2[x]) = \|\sin(x) - P_{\mathbb{R}_2[x]}(\sin(x))\| = \|\sin(x) - 3(\sin(1) - \cos(1)) x\|.$$

Haciendo la cuenta, tenemos que

$$\|\sin(x) - 3(\sin(1) - \cos(1)) x\|^2 = \int_{-1}^1 (\sin(x) - 3(\sin(1) - \cos(1)) x)^2 dx = \frac{11 \sin(2)}{2} - 5.$$

Entonces

$$d(\sin(x), \mathbb{R}_2[x]) = \sqrt{\frac{11 \sin(2)}{2} - 5} \approx 0,0337.$$

$$d(\cos(x), \mathbb{R}_2[x]) = \|\cos(x) - P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(x))\| = \|\cos(x) - \sin(1) 1 - \frac{15}{2} (3 \cos(1) - 2 \sin(1)) (x^2 - \frac{1}{3})\|.$$

Haciendo la cuenta, tenemos que

$$\begin{aligned} &\|\cos(x) - \sin(1) 1 - \frac{15}{2} (3 \cos(1) - 2 \sin(1)) (x^2 - \frac{1}{3})\|^2 \\ &= \int_{-1}^1 (\cos(x) - \sin(1) 1 - \frac{15}{2} (3 \cos(1) - 2 \sin(1)) (x^2 - \frac{1}{3}))^2 dx \\ &= \frac{121 \sin(2)}{2} - 65 - 24 \cos(2). \end{aligned}$$

Entonces

$$d(\cos(x), \mathbb{R}_2[x]) = \sqrt{\frac{121 \sin(2)}{2} - 65 - 24 \cos(2)} \approx 0,0043.$$

□

Como se ve la aproximación de las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ por los 3 primeros polinomios de Legendre normalizados es bastante buena.

Ejercicio de examen: Se considera $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Sea $C = \{1; x - \frac{1}{2}; x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ una base (ordenada) ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ que se obtuvo aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a la base ordenada $B = \{p_1; p_2; p_3\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Calcular

$$d(q, \text{gen}\{p_1, p_2\}),$$

donde $q(x) = 1 + x^2$.

Dem. Recordar que como $\text{gen}\{p_1, p_2\}$ es un subespacio de dimensión finita, tenemos que

$$d(q, \text{gen}\{p_1, p_2\}) = \|q - P_{\text{gen}\{p_1, p_2\}}(q)\|.$$

No sabemos quiénes son los vectores p_1 y p_2 , sin embargo, sabemos que la base (ordenada) ortogonal C se obtuvo aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a la base ordenada B . Vimos al principio de esta Sección que el algoritmo de Gram-Schmidt, asegura que:

$$\begin{aligned} \text{gen}\{p_1\} &= \text{gen}\{1\}, \\ \text{gen}\{p_1, p_2\} &= \text{gen}\{1, x - \frac{1}{2}\}, \\ \text{gen}\{p_1, p_2, p_3\} &= \text{gen}\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{gen}\{p_1, p_2\} = \text{gen}\{1, x - \frac{1}{2}\}$ y además $\{1, x - \frac{1}{2}\}$ es una base ortogonal de $\text{gen}\{p_1, p_2\}$. Entonces, podemos aplicar la fórmula de la proyección ortogonal (1) y tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\text{gen}\{p_1, p_2\}}(q) &= P_{\text{gen}\{p_1, p_2\}}(1 + x^2) = \frac{\langle 1 + x^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 + \frac{\langle 1 + x^2, x - \frac{1}{2} \rangle}{\|x - \frac{1}{2}\|^2} (x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{4}{1} 1 + \frac{1}{\frac{1}{12}} (x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{4}{3} + (x - \frac{1}{2}) = x + \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} d(1 + x^2, \text{gen}\{p_1, p_2\}) &= \|1 + x^2 - P_{\text{gen}\{p_1, p_2\}}(1 + x^2)\| = \|1 + x^2 - (x + \frac{5}{6})\| \\ &= \|x^2 - x + \frac{1}{6}\| = \sqrt{\frac{1}{180}}. \end{aligned}$$

□

Descomposición QR

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ de rango n . Una *descomposición QR* de A es una factorización

$$A = QR \text{ con } Q \in \mathbb{K}^{m \times n} \text{ y } R \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

tales que las columnas de Q son una base ortonormal de $\text{col}(A)$ considerando el producto interno canónico de \mathbb{R}^m y R es triangular superior con números positivos en la diagonal principal.

Ejercicio 29 : Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango n .

- Comprobar que existe una descomposición QR de A .
- Demostrar que la descomposición QR de A es única.

Dem. a) : Lo vamos a demostrar usando el algoritmo de Gram-Schmidt.

Supongamos que $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ son las columnas de A , es decir $A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]$. Como $\dim(\text{col}(A)) = \text{rg}(A) = n$, tenemos que el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es LI, entonces podemos aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt a dicho conjunto usando el producto interno canónico de \mathbb{R}^m . Si hacemos eso, vamos a obtener una base ortogonal $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ de $\text{col}(A)$, donde:

$$\begin{aligned}w_1 &= a_1 \\w_2 &= a_2 - \alpha_{12}w_1, \\w_3 &= a_3 - \alpha_{13}w_1 - \alpha_{23}w_2, \\&\vdots \\w_n &= a_n - \alpha_{1n}w_1 - \alpha_{2n}w_2 - \dots - \alpha_{(n-1)n}w_{n-1}.\end{aligned}$$

Con

$$\alpha_{ij} = \frac{\langle a_j, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} = \frac{w_i^T a_j}{\|w_i\|^2} \text{ para } 1 \leq i < j.$$

Despejando cada a_i de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}a_1 &= w_1, \\a_2 &= \alpha_{12}w_1 + w_2, \\a_3 &= \alpha_{13}w_1 + \alpha_{23}w_2 + w_3, \\&\vdots \\a_n &= \alpha_{1n}w_1 + \alpha_{2n}w_2 + \dots + \alpha_{(n-1)n}w_{n-1} + w_n.\end{aligned}$$

Entonces, si escribimos lo anterior de manera matricial, nos queda

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n] = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ \cdots \ w_n] \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Llamemos $Q_0 = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $R_0 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Entonces $A = Q_0 R_0$ y ya casi estamos. Notar que las columnas de Q_0 forman una base ortogonal de \mathbb{R}^m (con el producto interno canónico de \mathbb{R}^m). Queremos que las columnas formen una base ortonormal, eso lo arreglamos definiendo

$$Q := [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \cdots \ q_n] \text{ con } q_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}.$$

Para que el producto nos siga dando A necesitamos modificar R_0 de la siguiente manera:

$$R := \begin{bmatrix} \|w_1\| & \alpha_{12}\|w_1\| & \alpha_{13}\|w_1\| & \cdots & \alpha_{1n}\|w_1\| \\ 0 & \|w_2\| & \alpha_{23}\|w_2\| & \cdots & \alpha_{2n}\|w_2\| \\ 0 & 0 & \|w_3\| & \cdots & \alpha_{3n}\|w_3\| \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|w_n\| \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A = QR,$$

donde R es triangular superior con elementos positivos (no nulos) en su diagonal principal y Q es una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal de \mathbb{R}^m . Sólo nos resta ver que $\text{col}(Q) = \text{col}(A)$. De hecho, como $A = QR$, entonces es claro que $\text{col}(A) = \text{col}(QR) \subseteq \text{col}(Q)$. Por otra parte, como $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular superior con elementos positivos (no nulos) en su diagonal principal, es fácil ver que $\det(R) > 0$, entonces R es invertible, por lo tanto

$$AR^{-1} = (QR)R^{-1} = QI = Q.$$

Entonces, $\text{col}(Q) = \text{col}(AR^{-1}) \subseteq \text{col}(A)$. Como probamos la doble inclusión, concluimos que $\text{col}(Q) = \text{col}(A)$.

Entonces $A = QR$ es una descomposición QR de A .

b) : Veamos que la factorización $A = QR$ del ítem a) es única. Pero antes de hacer la prueba, vamos a remarcar los siguientes hechos que se pueden verificar fácilmente:

- Si $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz **triangular superior** entonces R^T es una matriz **triangular inferior**.
- Si $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz **triangular superior** invertible entonces R^{-1} también es una matriz **triangular superior** invertible.
- Si $R, R' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son dos matrices **triangulares superiores** invertibles entonces RR'^{-1} y $R'R^{-1}$ también son matrices **triangulares superiores** invertibles.
- Si $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal (tomando el producto interno canónico de \mathbb{R}^m). Entonces

$$Q^T Q = I_{\mathbb{R}^n}.$$

De hecho, si $Q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]$, donde $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{R}^m$ son las columnas de Q . Entonces

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n] = \begin{bmatrix} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 & \cdots & q_1^T q_n \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 & \cdots & q_2^T q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T q_1 & q_n^T q_2 & \cdots & q_n^T q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_{\mathbb{R}^n}.$$

Donde usamos que las columnas de Q forman una base ortonormal (con el producto interno canónico de \mathbb{R}^m). Entonces $0 = \langle q_i, q_j \rangle = q_j^T q_i$ para todo $i \neq j$ y $1 = \|q_i\|^2 = q_i^T q_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Ahora sí, probemos el item b). Supongamos que $A = Q'R'$ es otra descomposición QR de A . Entonces, $R' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular superior con elementos positivos (no nulos) en su diagonal principal y $Q' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal de $\text{col}(A)$. Como $A = QR$ tenemos que

$$QR = Q'R'. \quad (2)$$

Multipliquemos la ecuación (2) a izquierda por Q'^T y a derecha por R^{-1} , entonces usando las propiedades que acabamos de ver, tenemos por un lado

$$Q'^T(QR)R^{-1} = Q'^T(Q'R')R^{-1} = (Q'^T Q')R'R^{-1} = R'R^{-1}$$

y por el otro

$$Q'^T(QR)R^{-1} = Q'^T Q(RR^{-1}) = Q'^T Q.$$

Entonces, probamos que

$$Q'^T Q = Q'^T(QR)R^{-1} = R'R^{-1}. \quad (3)$$

De (3) tenemos que como $R'R^{-1}$ es una matriz triangular superior, entonces $Q'^T Q$ es una matriz triangular superior.

Ahora, multipliquemos la ecuación (2) a izquierda por Q^T y a derecha por R'^{-1} , entonces usando las propiedades que acabamos de ver, tenemos por un lado

$$Q^T(QR)R'^{-1} = Q^T(Q'R')R'^{-1} = Q^TQ'(R'R'^{-1}) = Q^TQ'$$

y por el otro lado

$$Q^T(QR)R'^{-1} = (Q^TQ)RR'^{-1} = RR'^{-1}.$$

Entonces, probamos que

$$RR'^{-1} = Q^T(QR)R'^{-1} = Q^TQ'. \quad (4)$$

De (4) tenemos que como RR'^{-1} es una matriz triangular superior, entonces Q^TQ' es una matriz triangular superior. Entonces, $(Q^TQ')^T$ por un lado es triangular inferior y por el otro lado como $(Q^TQ')^T = Q'^TQ$, por (3), tenemos que $(Q^TQ')^T$ es triangular superior. Entonces $(Q^TQ')^T = Q'^TQ$, es a la vez triangular superior y triangular inferior. Entonces Q'^TQ es una matriz diagonal. A esa matriz diagonal, la llamamos D y entonces tenemos que

$$Q'^TQ = R'R^{-1} = D := \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix},$$

con $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R}$. Multiplicando (2) a izquierda por Q'^T , tenemos por un lado que

$$Q'^T(QR) = (Q'^TQ)R = DR$$

y por el otro lado

$$Q'^T(Q'R') = (Q'^TQ')R' = R'.$$

Entonces, nos queda que

$$R' = DR.$$

Observar que como R y R' son dos matrices **triangulares superiores** con elementos positivos (no nulos) en su diagonal principal, no queda otra (hacer la cuenta) que d_1, d_2, \dots, d_n sean todos números positivos (no nulos).

Ahora, multiplicando (2) a derecha por R'^{-1} , tenemos por un lado que

$$(QR)R'^{-1} = Q(RR'^{-1}) = QD$$

y por el otro lado

$$(Q'R')R'^{-1} = Q'(R'R'^{-1}) = Q'.$$

Entonces, tenemos que $Q' = QD$ y

$$I = Q'^TQ' = (QD)^T(QD) = D^T(Q^TQ)D = D^TID = D^TD = D^2,$$

recordar que como D es diagonal $D^T = D$. Entonces

$$\begin{bmatrix} d_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $|d_1| = |d_2| = \cdots = |d_n| = 1$. Como probamos que d_1, d_2, \dots, d_n son todos positivos (no nulos), se sigue que $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$, entonces $D = I$. Por lo tanto $R'R^{-1} = D = I$ y multiplicando esa ecuación a derecha por R , nos queda que

$$R' = R.$$

De la misma manera, teníamos que $Q' = QD = QI = Q$, entonces

$$Q' = Q.$$

Con esto probamos que la descomposición QR de A es única. □

Antes de hacer ejemplos de cálculo de descomposición QR, vamos a notar dos propiedades importantes.

Primero observar que si $A = QR$ es la descomposición QR de A . Entonces, usando que $Q^T Q = I$, se sigue que

$$Q^T A = Q^T QR = R, \tag{5}$$

y tenemos una forma fácil de hallar R una vez encontrada Q .

Por otra parte,

considerando el producto interno canónico, notar que

$$QQ^T = [P_{\text{col}(A)}]_E^E, \tag{6}$$

donde E es la base canónica de \mathbb{R}^m .

De hecho, observar que $(QQ^T)(QQ^T) = Q(Q^T Q)Q^T = QI_{\mathbb{R}^n}Q^T = QQ^T$. Entonces

$$(QQ^T)^2 = QQ^T. \tag{7}$$

Además,

$$(QQ^T)^T = (Q^T)^T Q^T = QQ^T. \tag{8}$$

Sea $T : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, la transformación lineal definida por

$$T(x) := QQ^T(x).$$

Entonces, claramente T es un proyector de \mathbb{C}^m . De hecho, por (7), se sigue que $T^2(x) = (QQ^T)^2(x) = QQ^T(x) = T(x)$. Entonces $T^2 = T$.

Por otra parte, considerando el **producto interno canónico** de \mathbb{C}^m , por (8), para cada $x, y \in \mathbb{C}^m$, tenemos que

$$\langle T(x), y \rangle = (T(x))^T y = (QQ^T(x))^T y = x^T (QQ^T)^T y = x^T QQ^T(y) = x^T T(y) = \langle x, T(y) \rangle.$$

Entonces, tenemos que T es un proyector y

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle,$$

para todo $x, y \in \mathbb{C}^m$. Por lo tanto, por el **Ejercicio 20** (resuelto la Semana 11), T es un proyector ortogonal.

Además, por un lado es claro que $Im(T) = col(QQ^T)$ y por el otro lado, recordemos que la semana pasada probamos que $col(QQ^T) = nul((QQ^T)^T)^\perp = nul(QQ^T)^\perp = nul(Q^T)^\perp = col(Q)$. Entonces,

$$Im(T) = col(QQ^T) = col(Q) = col(A).$$

Por lo tanto, probamos que

$$T = P_{col(A)}.$$

Finalmente, si E es la base canónica de \mathbb{R}^m , es inmediato ver que $[T]_E^E = QQ^T$. Por lo tanto

$$[P_{col(A)}]_E^E = [T]_E^E = QQ^T$$

y probamos lo que queríamos.

Ejercicio 30 : Hallar la descomposición QR de

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{S} = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. Considerando el producto interno canónico de \mathbb{R}^3 calcular $[P_{\mathcal{S}}]_E^E$,

donde E es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Dem. Como $A_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ y $rg(A_1) = 2$ podemos usar lo que probamos en el **Ejercicio 30**. Sólo basta encontrar una base ortonormal (con el producto interno canónico de \mathbb{R}^3) del subespacio

$$col(A_1) = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Usando Gram-Schmidt, se sigue que

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{210}} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base ortonormal de $\text{col}(A_1)$. Entonces, tomamos

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{210}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-8}{\sqrt{210}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11}{\sqrt{210}} \end{bmatrix}.$$

Entonces, por (5), tenemos que

$$R = Q^T A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{210}} & \frac{-8}{\sqrt{210}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11}{\sqrt{210}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{210}} \end{bmatrix}.$$

Las matrices Q y R que definimos cumplen que $A_1 = QR$, donde $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ es una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal de $\text{col}(A_1)$ y $R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz triangular superior con elementos positivos (no nulos) en la diagonal. Esa es la descomposición QR de A_1 .

Finalmente, observar que $\mathcal{S} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \text{col}(A_1)$. Entonces, usando la ecuación (6),

que vale porque estamos considerando el producto interno canónico de \mathbb{R}^3 y la base canónica de \mathbb{R}^3 tenemos

$$[P_{\mathcal{S}}]_E^E = QQ^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{210}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-8}{\sqrt{210}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11}{\sqrt{210}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{210}} & -\frac{8}{\sqrt{210}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11}{\sqrt{210}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{34}{35} & -\frac{3}{35} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{35} & \frac{26}{35} \end{bmatrix}.$$

□

Teorema de representación de Riesz

Finalizamos la Guía con una teorema muy importante y varias aplicaciones del mismo.

Teorema de representación de Riesz: sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio euclídeo de dimensión finita y $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ una funcional lineal, entonces existe un único vector $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$\phi(v) = \langle v, u \rangle,$$

para todo $v \in \mathbb{V}$.

El siguiente ejercicio es una demostración del Teorema de representación de Riesz.

Ejercicio 31: Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio euclídeo finito dimensional.

a) Sea $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$. Demostrar que

$$\phi(v) = \langle v, \overline{\phi(w)}w \rangle,$$

para cualquier $w \in \text{Nu}(\phi)^\perp$ tal que $\|w\| = 1$.

b) Notar que $\overline{\phi(w)}w$ no depende de la elección de w .

Observar que si lo que afirma el ejercicio es correcto, podemos tomar $u := \overline{\phi(w)}w$, entonces u es el único vector de \mathbb{V} tal que

$$\phi(v) = \langle v, u \rangle,$$

para todo $v \in \mathbb{V}$. Por lo tanto, si resolvemos el **Ejercicio 31**, estamos demostrando el Teorema de representación de Riesz.

Dem. a) : Caso Trivial: $\phi = 0$, es decir ϕ es la transformación lineal nula, entonces $\phi(v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$. En este caso, claramente

$$Nu(\phi) = \mathbb{V},$$

o dicho de otra manera, $v \in Nu(\phi)$ para todo $v \in \mathbb{V}$. Entonces, tomemos cualquier $w \in Nu(\phi)^\perp$ tal que $\|w\| = 1$. Observar que $\overline{\phi(w)} \in \mathbb{K}$ (es decir es un escalar) y entonces $\overline{\phi(w)}w \in Nu(\phi)^\perp$ (porque $Nu(\phi)^\perp$ es un subespacio). Entonces, como $v \in Nu(\phi)$ tenemos que $\langle v, \overline{\phi(w)}w \rangle = 0$ y se sigue de manera trivial que, para todo $v \in \mathbb{V}$,

$$\phi(v) = 0 = \langle v, \overline{\phi(w)}w \rangle,$$

para cualquier $w \in Nu(\phi)^\perp$ tal que $\|w\| = 1$.

Caso No Trivial: $\phi \neq 0$. En este caso, existe $v \neq 0_{\mathbb{V}}$ tal que $\phi(v) \neq 0$ (por qué?) y entonces $Im(\phi) = \mathbb{K}$ y, como \mathbb{V} es de dimensión finita, por el teorema de la dimensión, se sigue que

$$\dim(Nu(\phi)) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(Im(\phi)) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{K}) = \dim(\mathbb{V}) - 1.$$

De la misma manera, como $Nu(\phi)$ es un subespacio y \mathbb{V} es de dimensión finita, tenemos que

$$\dim(Nu(\phi)^\perp) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(Nu(\phi)) = \dim(\mathbb{V}) - (\dim(\mathbb{V}) - 1) = 1.$$

Entonces, tomemos cualquier $w \in Nu(\phi)^\perp$ tal que $\|w\| = 1$. Como $\dim(Nu(\phi)^\perp) = 1$, tenemos que

$$Nu(\phi)^\perp = gen\{w\}.$$

Sea $v \in \mathbb{V}$, como $Nu(\phi)$ es un subespacio y \mathbb{V} es de dimensión finita, vale que $\mathbb{V} = Nu(\phi) \oplus Nu(\phi)^\perp$, entonces existen (únicos) $v_1 \in Nu(\phi)$ y $v_2 \in Nu(\phi)^\perp$ tales que

$$v = v_1 + v_2.$$

Entonces, como $v_2 \in Nu(\phi)^\perp = gen\{w\}$, tenemos que existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que

$$v_2 = \alpha w.$$

Es más, podemos ver quién es α . De hecho

$$\langle v, w \rangle = \langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle \alpha w, w \rangle = 0 + \alpha \langle w, w \rangle = \alpha \|w\|^2 = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Entonces

$$\alpha = \langle v, w \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi(v) &= \phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) = 0 + \phi(v_2) = \phi(v_2) = \phi(\alpha w) = \alpha\phi(w) \\ &= \langle v, w \rangle \phi(w) = \phi(w) \langle v, w \rangle = \left\langle v, \overline{\phi(w)}w \right\rangle,\end{aligned}$$

donde para la última igualdad usamos que $\phi(w) \in \mathbb{K}$ (es decir es un escalar) y que el producto interno cumple que $c \langle u, v \rangle = \langle u, \bar{c}v \rangle$.

Entonces, probamos que para todo $v \in \mathbb{V}$ vale que

$$\phi(v) = \left\langle v, \overline{\phi(w)}w \right\rangle,$$

para cualquier $w \in Nu(\phi)^\perp$ tal que $\|w\| = 1$.

b) : Tomemos otro vector $w' \in Nu(\phi)^\perp$ tal que $\|w'\| = 1$. Veamos que $\overline{\phi(w')}w' = \overline{\phi(w)}w$. Observar que como $w, w' \in Nu(\phi)^\perp$ (y no son nulos) entonces $Nu(\phi)^\perp = gen\{w\} = gen\{w'\}$. Entonces, como $\overline{\phi(w')}w' \in Nu(\phi)^\perp = gen\{w\}$, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que

$$\overline{\phi(w')}w' = \alpha w. \tag{9}$$

Veamos a qué es igual α . Por un lado

$$\langle \alpha w, w \rangle = \alpha \langle w, w \rangle = \alpha \|w\|^2 = \alpha.$$

Por el otro lado, por lo que acabamos de probar en el ítem a), como w' es cualquier vector en $Nu(\phi)^\perp$ tal que $\|w'\| = 1$, vale que

$$\phi(w) = \left\langle w, \overline{\phi(w')}w' \right\rangle.$$

Entonces, usando (9) y la observación que acabamos de hacer se sigue que

$$\alpha = \langle \alpha w, w \rangle = \left\langle \overline{\phi(w')}w', w \right\rangle = \overline{\left\langle w, \overline{\phi(w')}w' \right\rangle} = \overline{\phi(w)}.$$

Entonces $\alpha = \overline{\phi(w)}$ y volviendo a (9), se sigue que $\overline{\phi(w')}w' = \overline{\phi(w)}w$ y probamos que $\overline{\phi(w)}w$ no depende de la elección de w . \square

Con la resolución del **Ejercicio 31** probamos el Teorema de representación de Riesz. Veamos dos aplicaciones de dicho teorema.

Ejercicio 32: En $\mathbb{R}_n[x]$ con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Se considera $\delta : \mathbb{R}^n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ la funcional lineal definida por

$$\delta(p) = p(0).$$

Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ hallar el polinomio $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que

$$\delta(\cdot) = \langle \cdot, p_n \rangle.$$

Por si no se entiende la notación, lo que nos pide el ejercicio es hallar el polinomio $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que

$$\delta(p) = \langle p, p_n \rangle,$$

para todo $p \in \mathbb{R}_n[x]$. Vamos a demostrarlo para el caso $n = 3$, los demás casos son similares.

Dem. Consideremos $n = 3$. Por el **Ejercicio 31**, para todo $p \in \mathbb{R}_n[x]$, se sigue que para cualquier $q \in Nu(\delta)^\perp$ tal que $\|q\| = 1$, vale que

$$\delta(p) = \langle p, \overline{\delta(q)}q \rangle.$$

Si tomamos $p_3(x) := \overline{\delta(q)}q(x)$ entonces encontramos el polinomio p_3 que queríamos. Busquemos entonces algún polinomio q que cumpla lo que buscamos.

Recordar que $Nu(\delta) = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : \delta(p) = 0\}$, entonces $p \in Nu(\delta)$ si $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y

$$0 = \delta(p) = p(0) = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = d.$$

Entonces $d = 0$ y volviendo a la expresión de p tenemos que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$Nu(\delta) = \text{gen}\{x, x^2, x^3\}.$$

A continuación, vamos a hallar

$$Nu(\delta)^\perp = \{r \in \mathbb{R}_3[x] : \langle r, p \rangle = 0 \text{ para todo } p \in Nu(\delta)\}.$$

Recordemos que $r \in Nu(\delta)^\perp$ si r es ortogonal a cada generador de $Nu(\delta)$. Entonces, $r \in Nu(\delta)^\perp$ si $r(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h$ con $e, f, g, h \in \mathbb{R}$ y

$$0 = \langle r, x \rangle = \langle r, x^2 \rangle = \langle r, x^3 \rangle.$$

Haciendo cuentas, tenemos que

$$0 = \langle r, x \rangle = \int_{-1}^1 (ex^3 + fx^2 + gx + h)x dx = e \frac{x^5}{5} + f \frac{x^4}{4} + g \frac{x^3}{3} + h \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = e \frac{2}{5} + g \frac{2}{3}.$$

$$0 = \langle r, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 (ex^3 + fx^2 + gx + h)x^2 dx = e \frac{x^6}{6} + f \frac{x^5}{5} + g \frac{x^4}{4} + h \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = f \frac{2}{5} + h \frac{2}{3}.$$

$$0 = \langle r, x^3 \rangle = \int_{-1}^1 (ex^3 + fx^2 + gx + h)x^3 dx = e \frac{x^7}{7} + f \frac{x^6}{6} + g \frac{x^5}{5} + h \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = e \frac{2}{7} + g \frac{2}{5}.$$

Nos quedaron las ecuaciones

$$e \frac{2}{5} + g \frac{2}{3} = f \frac{2}{5} + h \frac{2}{3} = e \frac{2}{7} + g \frac{2}{5} = 0.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que

$$e = g = 0 \text{ y } f = -\frac{5}{3}h.$$

Entonces, volviendo a la expresión de r , tenemos que $r(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h = h(1 - \frac{5}{3}x^2)$ con $h \in \mathbb{R}$. Entonces

$$Nu(\delta)^\perp = \text{gen}\{1 - \frac{5}{3}x^2\}.$$

Notar que

$$\|1 - \frac{5}{3}x^2\|^2 = \int_{-1}^1 (1 - \frac{5}{3}x^2)^2 dx = \frac{5x^5}{9} - \frac{10x^3}{9} + x \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{9}.$$

Tomando $q(x) := \frac{(1 - \frac{5}{3}x^2)}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{8}}(1 - \frac{5}{3}x^2) = \frac{3\sqrt{2}}{4}(1 - \frac{5}{3}x^2)$, tenemos que

$q \in Nu(\delta)^\perp$ y $\|q\| = 1$. Observar que $\delta(q) = q(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Entonces,

$$p_3(x) := \overline{\delta(q)}q(x) = \overline{q(0)}q(x) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{3\sqrt{2}}{4}(1 - \frac{5}{3}x^2) = \frac{9}{8}(1 - \frac{5}{3}x^2) = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}x^2.$$

El polinomio $p_3(x) = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}x^2$ que encontramos cumple que, para todo $p \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$\delta(p) = \left\langle p, \frac{9}{8} - \frac{15}{8}x^2 \right\rangle.$$

Además p_3 es el único polinomio que cumple la igualdad anterior por el ítem b) del **Ejercicio 31**. \square

A continuación vemos otra aplicación muy importante del Teorema de representación de Riesz.

Ejercicio: Sean $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{V}})$ y $(\mathbb{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{W}})$ dos \mathbb{K} -espacios euclídeos finito dimensionales y $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal.

Demostrar que existe una única transformación lineal $S : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que

$$\langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}} = \langle v, S(w) \rangle_{\mathbb{V}},$$

para todo $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$.

Ayuda: usar el Teorema de representación de Riesz para cada $w \in \mathbb{W}$ fijo con la funcional lineal $\phi_w(v) := \langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}}$.

Dem. Tomemos $w \in \mathbb{W}$ arbitrario pero fijo y consideremos la funcional lineal de la ayuda, $\phi_w : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\phi_w(v) := \langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}}.$$

Ver **Ejercicio 1**.

Efectivamente ϕ_w es una funcional lineal. De hecho, si $v, v' \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces, usando que T es una transformación lineal y los axiomas de producto interno tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_w(\alpha v + \beta v') &= \langle T(\alpha v + \beta v'), w \rangle_{\mathbb{W}} = \langle \alpha T(v) + \beta T(v'), w \rangle_{\mathbb{W}} = \alpha \langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}} + \beta \langle T(v'), w \rangle_{\mathbb{W}} \\ &= \alpha \phi_w(v) + \beta \phi_w(v'). \end{aligned}$$

Como $\phi_w \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$, por el Teorema de representación de Riesz que probamos en el **Ejercicio 31**, existe un único vector $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$\phi_w(v) = \langle v, u \rangle_{\mathbb{V}}.$$

Tenemos todos los ingredientes para definir la transformación lineal $S : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ que pide el ejercicio. De hecho, vamos a definir S como

$$S(w) := u.$$

Notar que S está bien definida, porque para cada $w \in \mathbb{W}$ que fijamos, por el Teorema de representación de Riesz obtuvimos un único $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$\phi_w(v) = \langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}} = \langle v, u \rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, S(w) \rangle_{\mathbb{V}}. \quad (10)$$

Por otra parte, S es una transformación lineal, pues, si $w, w' \in \mathbb{W}$, por el Teorema de representación de Riesz, existen únicos $u, u' \in \mathbb{V}$ tales que

$$\phi_w(v) = \langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}} = \langle v, u \rangle_{\mathbb{V}} \quad \text{y} \quad \phi_{w'}(v) = \langle T(v), w' \rangle_{\mathbb{W}} = \langle v, u' \rangle_{\mathbb{V}}.$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces, por los axiomas del producto interno tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha w + \beta w'}(v) &= \langle T(v), \alpha w + \beta w' \rangle_{\mathbb{W}} = \bar{\alpha} \langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}} + \bar{\beta} \langle T(v), w' \rangle_{\mathbb{W}} \\ &= \bar{\alpha} \phi_w(v) + \bar{\beta} \phi_{w'}(v) = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle_{\mathbb{V}} + \bar{\beta} \langle v, u' \rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, \alpha u + \beta u' \rangle_{\mathbb{V}}. \end{aligned}$$

Entonces, por la unicidad del Teorema de representación de Riesz, se sigue que $\alpha u + \beta u'$ es el único vector de \mathbb{V} tal que

$$\phi_{\alpha w + \beta w'}(v) = \langle v, \alpha u + \beta u' \rangle_{\mathbb{V}}.$$

Entonces, por definición de S , tenemos que

$$S(\alpha w + \beta w') = \alpha u + \beta u' = \alpha S(w) + \beta S(w')$$

y concluimos que S es una transformación lineal.

Finalmente, volviendo a (10) tenemos que, para cada $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$

$$\langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}} = \phi_w(v) = \langle v, u \rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, S(w) \rangle_{\mathbb{V}}.$$

Por lo tanto la transformación lineal S cumple lo que queríamos.

Veamos que S es la única transformación que lo cumple. Supongamos que existe $S' \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ tal que para todo $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$

$$\langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}} = \langle v, S(w) \rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, S'(w) \rangle_{\mathbb{V}}.$$

Entonces, $\langle v, S(w) \rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, S'(w) \rangle_{\mathbb{V}}$, para todo $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$. Entonces, usando la linealidad del producto interno, se sigue que para todo $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$

$$\langle v, S(w) - S'(w) \rangle_{\mathbb{V}} = \langle v, S(w) \rangle_{\mathbb{V}} - \langle v, S'(w) \rangle_{\mathbb{V}} = 0.$$

Es decir $\langle v, S(w) - S'(w) \rangle_{\mathbb{V}} = 0$, para todo $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$. En particular podemos tomar $v := S(w) - S'(w)$, entonces,

$$0 = \langle v, S(w) - S'(w) \rangle_{\mathbb{V}} = \langle S(w) - S'(w), S(w) - S'(w) \rangle_{\mathbb{V}} = \|S(w) - S'(w)\|_{\mathbb{V}}^2,$$

para todo $w \in \mathbb{W}$. Entonces,

$$S(w) - S'(w) = 0_{\mathbb{V}},$$

para todo $w \in \mathbb{W}$. Por lo tanto

$$S(w) = S'(w),$$

para todo $w \in \mathbb{W}$. Entonces $S = S'$ y probamos lo que queríamos. \square

A la única transformación lineal $S : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ que cumple

$$\langle T(v), w \rangle_{\mathbb{W}} = \langle v, S(w) \rangle_{\mathbb{V}},$$

para todo $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$, se la llama *la transformación lineal adjunta de T* y se la suele notar $T^* := S$. No confundir con la notación que usamos para matrices, recordar que si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ es una matriz, definimos $A^* = \overline{A^T}$. De todas maneras, el próximo ejemplo muestra que la notación para la transformación lineal adjunta, no es casual.

Ejemplo 1: Tomemos $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$ y $\mathbb{W} = \mathbb{C}^m$ con el producto interno canónico y definamos $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ como

$$T(x) = Ax,$$

donde $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ es una matriz. Recordemos que $A^* = \overline{A^T}$ y el producto interno canónico se define como $\langle u, v \rangle = v^*u$. Entonces, observar que para todo $x \in \mathbb{C}^n$ e $y \in \mathbb{C}^m$, tenemos que

$$\langle T(x), y \rangle_{\mathbb{C}^m} = y^*(T(x)) = y^*(Ax) = (y^*A)x = (A^*y)^*x = \langle x, A^*y \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

Por lo tanto, por definición de transformación lineal adjunta, en este caso tenemos que $T^* : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ es la transformación lineal definida como

$$T^*(y) = A^*y.$$

Ejemplo 2: Supongamos que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un \mathbb{K} -espacio euclídeo y $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio de dimensión finita. Sea

$$T := P_{\mathcal{S}}$$

(el proyector ortogonal de \mathbb{V} sobre \mathcal{S}). Por un lado, T es un proyector, por lo tanto

$$T^2 = T.$$

Además, en el **Ejercicio 20**, probamos que como T es un proyector ortogonal, para todo $x, y \in \mathbb{V}$ se cumple que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

Entonces, por definición de transformación lineal adjunta, se sigue que en este caso $T^* = T$.

Es más, a partir del **Ejercicio 20**, podemos decir que T es un proyector ortogonal si y sólo si $T^2 = T$ y $T^* = T$.

Juntando el **Ejemplo 1** y el **Ejemplo 2**, podemos ver que:

Si consideramos \mathbb{C}^n , con **producto interno canónico** y E es la **base canónica** de \mathbb{C}^n , entonces, para cualquier subespacio $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{V}$ se sigue que

$$[P_{\mathcal{S}}]_E^E = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^2 = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^*.$$

Si consideramos \mathbb{R}^n , con **producto interno canónico** y E es la **base canónica** de \mathbb{R}^n , se sigue que

$$[P_{\mathcal{S}}]_E^E = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^2 = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^T.$$

La prueba de este hecho se sigue viendo que para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $P_{\mathcal{S}}(x) = [P_{\mathcal{S}}]_E^E(x)$. Entonces, como $P_{\mathcal{S}}$ es un proyector ortogonal, por el **Ejemplo 2**, $P_{\mathcal{S}}^* = P_{\mathcal{S}}$, y por el **Ejemplo 1**, $P_{\mathcal{S}}^*(x) = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^*(x)$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, nos queda que

$$([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^*(x) = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)(x).$$

Eso implica que

$$[P_{\mathcal{S}}]_E^E = ([P_{\mathcal{S}}]_E^E)^*.$$